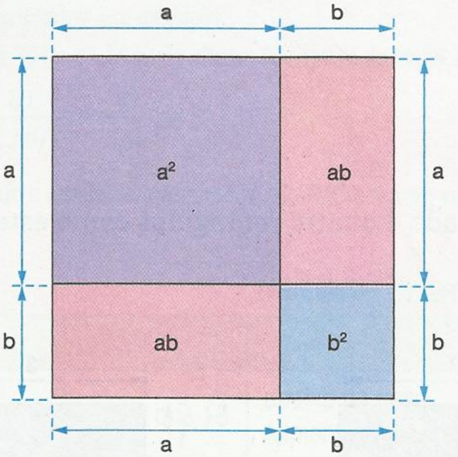
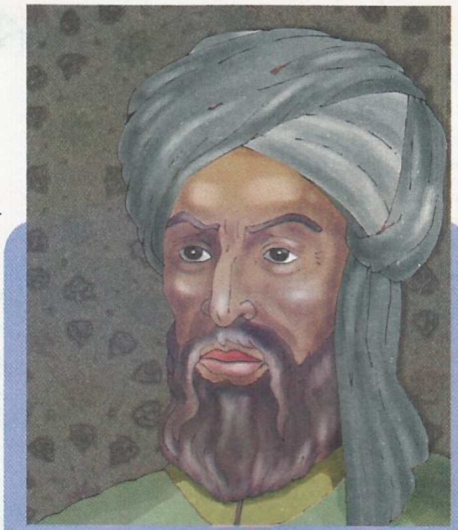
O PROCESSO DO COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Com base na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$, o matemático al-Khowarizmi estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Inicialmente, vamos observar a figura que é a representação geométrica da expressão $(a + b)^2$:

Ilustrações: Editoria de arte





Alberto Llinares

Matemático e astrônomo árabe, al-Khowarizmi viveu entre 780 e 850. Ele escreveu um tratado de Álgebra e um livro sobre os numerais hindus.
Essas obras exerceram enorme influência na Europa do século XII.

Pela figura, vemos que:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A interpretação geométrica é:

$a^2 + 2ab + b^2$

- b^2 → área do quadrado de lado *b*
- ab → área de um dos retângulos de lados *a* e *b*
- a^2 → área do quadrado de lado *a*

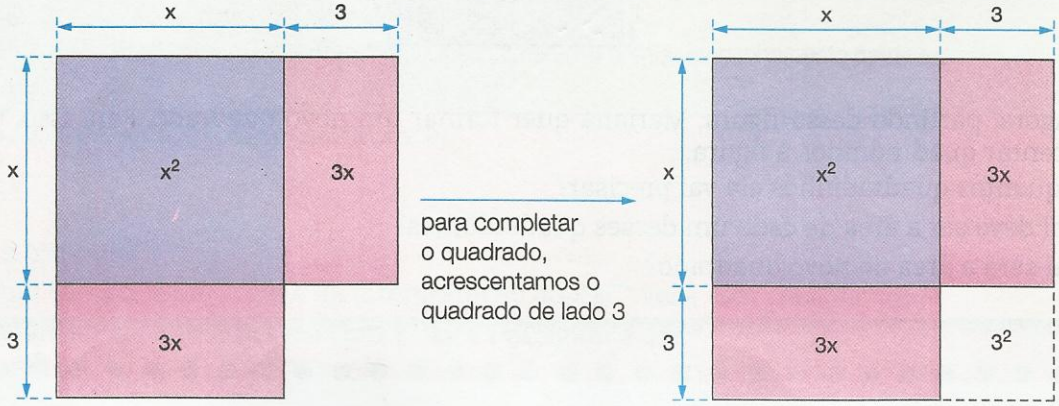
Utilizando essa interpretação, vamos acompanhar os exemplos a seguir, que mostram como al-Khowarizmi desenvolveu seus estudos.

1 Fazer uma interpretação geométrica da expressão $x^2 + 6x$.

$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$

- $3x$ → área de um retângulo cujos lados medem 3 e *x*
- x^2 → área de um quadrado cujo lado mede *x*

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:



Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado 3, ou seja, de área 3^2. Assim, se adicionarmos 3^2 à expressão $x^2 + 6x$, obteremos $x^2 + 6x + 3^2$, que é um trinômio quadrado perfeito. Daí, podemos escrever:

$$\underbrace{x^2 + 6x + 3^2}_{\text{expressão algébrica correspondente à área do quadrado formado}} = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = \underbrace{(x + 3)^2}_{\text{forma fatorada do trinômio}}$$

Note que $x^2 + 6x \neq x^2 + 6x + 9$, pois representam áreas diferentes.

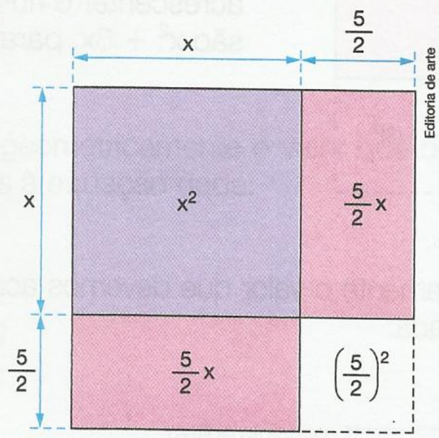
2 Fazer uma interpretação geométrica da expressão $x^2 + 5x$.

$$x^2 + 5x = x^2 + 2\left(\frac{5}{2}x\right)$$

→ área de um retângulo cujos lados medem $\frac{5}{2}$ e *x*

→ área de um quadrado cujo lado mede *x*

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:



Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado $\frac{5}{2}$, ou seja, um quadrado de área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Assim, se adicionarmos $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ à expressão $x^2 + 5x$, teremos:

$$\underbrace{x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\text{expressão algébrica correspondente à área do quadrado formado}} = \underbrace{x^2 + 5x + \frac{25}{4}}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = \underbrace{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}_{\text{forma fatorada do trinômio}}$$

EXERCÍCIO

Qual número real você deve adicionar a cada expressão a seguir para que se tenha um trinômio quadrado perfeito? Se necessário, utilize a interpretação geométrica, fazendo um esboço das figuras.

a) $x^2 + 8x$ **b)** $x^2 - 10x$ **c)** $x^2 + 2x$ **d)** $x^2 - 12x$ **e)** $x^2 + 9x$ **f)** $x^2 - 5x$

Exercícios resolvidos

1º) Qual número real deve ser adicionado para que a cada expressão a seguir tenha um trinômio quadrado perfeito?

a) x^2+8x

Resolução para saber que número real você deve adicionar, basta elevar $\left(\frac{1}{2} \cdot b\right)^2$, pois b é o coeficiente que resultou na multiplicação por 2, logo fica assim:

$$x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$x^2+8x+(4)^2$$
$$x^2+8x+16 = (x+4)^2$$

b) x^2-10x

$$x^2-10x+\left(\frac{10}{2}\right)^2$$
$$x^2-10x+(5)^2$$
$$x^2-10x+25=(x-5)^2$$

d) x^2-12x

$$x^2-12x+\left(\frac{12}{2}\right)^2$$
$$x^2-12x+(6)^2$$
$$x^2-12x+36=(x-6)^2$$

c) x^2+2x

$$x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2$$
$$x^2+2x+(1)^2$$
$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

e) x^2+9x

$$x^2+9x+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$
$$x^2+9x+\frac{81}{4} \text{ ou}$$
$$\frac{(4x^2+36x+81)\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}}$$
$$4x^2+36x+81$$

f) x^2-5x

$$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2-5x+\frac{25}{4} \text{ ou}$$
$$\frac{(4x^2-20x+25)\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}}$$
$$4x^2-20x+25$$

Resolução de uma equação do 2º grau pelo processo de AL-KHOWARIZMI

a) $x^2+2x-15=0$

$x^2+2x=15$

$x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2=15+\left(\frac{2}{2}\right)^2$

$x^2+2x+(1)^2=15+(1)^2$

$x^2+2x+1=15+1$

$(x+1)^2=16$

$x+1=\pm\sqrt{16}$

$x+1=\pm 4$

$x_1=4-1$ e $x_{11}=-4-1$

$x_1=3$ $x_{11}=-5$

b) $x^2+4x-12=0$

$x^2+4x=12$

$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=12+\left(\frac{4}{2}\right)^2$

$x^2+4x+(2)^2=12+(2)^2$

$(x+2)^2=12+4$

$(x+2)^2=16$

$(x+2)=\pm\sqrt{16}$

$(x+2)=\pm 4$

$x_1=+4-2$

$x_1=2$ ou $x_{11}=-4-2$

$x_{11}=-6$ #

c) $x^2+12x+32=0$

$x^2+12x=-32$

$x^2+12x+\left(\frac{12}{2}\right)^2=-32+\left(\frac{12}{2}\right)^2$

$x^2+12x+(6)^2=-32+(6)^2$

$(x+6)^2=-32+36$

$(x+6)^2=4$

$x+6=\pm\sqrt{4}$

$x+6=\pm 2$

$x_1=+2-6$

$x_1=-4$ ou $x_{11}=-2-6$

$x_{11}=-8$ #

d) $x^2+6x-7=0$

$x^2+6x=7$

$x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=7+\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$x^2+6x+(3)^2=7+(3)^2$

$(x+3)^2=7+9$

$(x+3)^2=16$

$x+3=\pm\sqrt{16}$

$x+3=\pm 4$

$x_1=+4-3$

$x_1=1$ ou $x_{11}=-4-3$

$x_{11}=-7$ #